Ferran Sancho
Xavier Vilà

100 ejercicios resueltos de estadística básica para economía y empresa

Departament d'Economia i d'Història Econòmica

Universitat Autònoma de Barcelona
Servei de Publicacions
Bellaterra, 2012

Primera edición: enero de 2012

Edición e impresión:
Servei de Publicacions
Universitat Autònoma de Barcelona
Edifici A. 08193 Bellaterra (Barcelona). Spain
sp@uab.cat
http://publicacions.uab.cat/

Impreso en Espanya. Printed in Spain

Depósito legal: B. 3556-2012
ISBN 978-84-490-2846-5

Índice

Prólogo

Tras muchos cursos impartiendo la asignatura de Estadística I en la Facultad de Economía y Empresa de la Universitat Autònoma de Barcelona hemos creído oportuno ofrecer la colección de problemas, junto con sus respectivas soluciones, que se ha ido generando a lo largo del tiempo. En un principio, los problemas se entregaban en listas individuales asociadas y pautadas al desarrollo del curso. Tras una primera experiencia, la lista se conformó en un único documento, eso sí, sin soluciones explícitas.

Con el paso del tiempo hemos ido añadiendo y quitando problemas, depurando la colección, con el objetivo que el nivel de la misma fuese el adecuado al de los estudiantes de la Facultad. Creemos que a pesar de que perduran ciertas diferencias de nivel, y también de extensión, hay una uniformidad suficiente entre los ejercicios y que cualquier alumno de Economía y Empresa debería ser capaz de resolverlos, o como mínimo de empezar a resolverlos, con elevada probabilidad de éxito. No hay en la colección ejercicios imposibles, pero sí hay ejercicios exigentes que precisan un grado de pensamiento profundo y de dedicación y esfuerzo, pero que no requieren capacidad técnica o analítica especial. Los ejercicios son para estudiantes de Economía y Empresa, y por esa razón huimos voluntariamente de los tecnicismos y apostamos por las aplicaciones que pueden ser de interés para los estudiantes de Economía y Empresa. No todos los ejercicios tiene un aire "económico", pero muchos han sido diseñados para que se vea la potencialidad de la estadística en las aplicaciones económicas.

La materia de Estadística en los planes de estudio de los nuevos grados adecuados al plan de Bolonia puede equipararse a la antigua asignatura de Estadística en las licenciaturas de las facultades de Ciencias Económicas y Empresariales. La presente colección corresponde al primer semestre de esta materia en los grados y es aplicable tanto al grado de Economía como a los grados de orientación empresarial, como son los de Administración y Dirección de Empresas, Contabilidad y Finanzas y Empresa y Tecnología. La materia es común a todos los grados, siguiendo el espíritu boloñés. Tras una primera y breve aproximación al tratamiento de datos empíricos, el primer semestre de la materia de Estadística se centra esencialmente en el ámbito del cálculo de probabilidades. Ello incluye una descripción de las reglas básicas de la probabilidad y una introducción extensa a las variables y vectores aleatorios. La inferencia estadística es objeto de estudio en el segundo semestre de la materia.

La paternidad de la colección es amplia, pues ha habido muchos profesores dedicados a la impartición de esta materia y nosotros somos, simplemente, los que con mayor frecuencia hemos asumido la responsabilidad. Si diésemos nombres, lo más probable es que nos dejásemos a alguien por el camino. A pesar de ello, y de ser seguramente injustos, no podemos obviar a Jordi Caballé y Michael Creel, profesores permanentes del departamento responsable de la impartición y colegas de aventura docente en esta materia. Aunque la mayoría de los ejercicios son de cosecha propia hay también un buen número que son "universales" y "atemporales", pues responden a preguntas básicas del cálculo de probabilidades. La colección incluye también un considerable número de ejercicios que aparecieron en las pruebas y exámenes de evaluación. Los hemos distinguido añadiendo un asterisco identificativo (*). De esta manera los estudiantes pueden visualizar cuáles son las dificultades reales a las que se deben enfrentar en el momento de la verdad, cuando se deben aportar los elementos que permitan garantizar que el nivel de conocimientos y de competencias adquiridos son los requeridos.

Bellaterra, junio de 2011

Estadística descriptiva

1. Un país ficticio está compuesto por tres autonomías. La primera (Tacanyuna) tiene dos habitantes cuyas rentas personales son 30 y 25 M (miles de euros). La segunda autonomía (Felicia) tiene tres habitantes con rentas de 45, 62 y 15. La tercera (Andamaria) tiene cinco habitantes con rentas de 38, 86, 43, 65 y 24.

    a. Calcular la renta per cápita de cada autonomía.
    b. Calcular la renta per cápita "promedio" de las autonomías (use la media aritmética simple).
    c. Repetir el apartado anterior usando la media ponderada (piense cuáles son los pesos).
    d. Calcular la renta per cápita de país y compararla con los resultados de b) y c). Comentar.

a. Calcularemos el promedio. El promedio de un conjunto de observaciones es la suma de los valores del conjunto dividida por el número de observaciones.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$$

En cada caso tendremos

$$\bar{x}_T = \frac{30+25}{2} = 27,5$$

$$\bar{x}_F = \frac{45+62+15}{3} = 40,67$$

$$\bar{x}_A = \frac{38+86+43+65+24}{5} = 51,2$$

b. Si calculamos el promedio de las tres rentas tendremos

$$\bar{x}_{CA} = \frac{27,5+40,67+51,2}{3} = 39,79$$

c. Tenemos que sumar las rentas de todos los habitantes del país (las tres autonomías) y dividir por el total de habitantes

$$\bar{x}_{per\ capita} = \frac{30+25+45+62+15+38+86+43+65+24}{10} =$$

$$= \frac{55+122+256}{10} = 43,3$$

Vemos que la renta per cápita no coincide con el promedio de las rentas per cápita de cada una de las autonomías. Esto se debe a que para calcular la renta per cápita del país a partir de las rentas per cápita de las autonomías estas se tendrían que ponderar por el número de habitantes.

2. (*) La cartera de activos de un inversor está compuesta por dos planes de inversión (planes I y II). El plan I se inició con una aportación de 1.000 euros, tiene dos años de vida y ha obtenido rentabilidades del 10% en el primer año y del 14% en el segundo. El plan II aportó 4.000 euros, tiene un año de vida y ha obtenido una rentabilidad del 9%. Calcular la rentabilidad "promedio" del plan I y estimar la rentabilidad de la cartera de inversiones.

   El plan I compromete 1.000 euros a que las rentabilidades obtenidas se transforman al final de los dos años en 1.254 euros. En efecto, al final del primer año el rendimiento es de (1+0,10) 1.000=1.100 euros. Esta cifra se transforma al final del segundo año en (1+0,14) 1.100=1.254 euros. La rentabilidad "promedio" del plan ha de ser la tasa anual r_I que, aplicada durante dos años a la cifra inicialmente comprometida, genera un rescate final de 1.254. Debe cumplirse pues

$$1.000 \;\; (1+r_I) \;\; (1+r_I) = 1.000 \;\; (1+r_I)^2 = 1.254$$

   de manera que

$$(1+r_I)^2 = \frac{1.254}{1.000} = 1,254$$

   y finalmente

$$r_I = \sqrt{1,254} \quad 1 = 0,1198 = 11,98\%$$

   Es interesante observar que esta rentabilidad "promedio", calculada usando matemáticas financieras, coincide con la rentabilidad promedio calculada usando la media geométrica a los factores anuales de incremento.

$$(1+r_I) = \sqrt{(1+r_1) \;\; (1+r_2)} = \sqrt{(1,10) \;\; (1,14)} = \sqrt{1,254} = 1,1198$$

   Para evaluar la rentabilidad de la cartera hemos de ponderar de alguna manera las rentabilidades "promedio" de los dos planes. Una posibilidad es tener en cuenta que los recursos comprometidos en ambos planes (1.000 y 4.000 euros) son distintos y usarlos como pesos. Procediendo así, la rentabilidad “promedio” de la cartera $\overline{r}$ se podría aproximar usando una media ponderada

$$\overline{r} = \frac{1}{5}\ r_I + \frac{4}{5}\ r_{II} = (0,2)\ (0,1198) + (0,8)\ (0,09) = 0,0959 = 9,59\%$$

3. Un aficionado a los coches acaba de adquirir una colección compuesta por:

1 Ferrari, con un precio de 200.000 €/unidad
2 Audis, con un precio de 50.000 €/unidad
4 Seats, con un de precio 15.000 €/unidad
1 Jaguar, con un precio de 100.000 €/unidad

a. Calcular el precio “promedio” de un coche (discutir qué medida debe usarse).
b. Calcular un índice de precios de la compra y compararlo con el anterior.

a. Se trata de considerar qué media ponderada es adecuada en este caso. Se pregunta cuál es el precio “promedio” de un coche y ello sugiere ponderar por los coches comprados, que en total han sido 8. Podemos usar los siguientes pesos:

$$\omega_1 = \frac{1}{8}$$
$$\omega_2 = \frac{2}{8}$$
$$\omega_3 = \frac{4}{8}$$
$$\omega_4 = \frac{1}{8}$$

de manera que el precio “promedio” de un coche será:

$$\overline{p}_\omega = \sum_{i=1}^{4} \omega_i \cdot p_i = \frac{1}{8} \cdot 200.000 + \frac{2}{8} \cdot 50.000 + \frac{4}{8} \cdot 15.000 + \frac{1}{8} \cdot 100.000 = 57.500$$

b. Ahora se trata de usar una ponderación que se corresponda con la tradicional ponderación de los índices de precios al consumo. En este caso los pesos se obtienen teniendo en cuenta el gasto dedicado a cada uno de los ítems adquiridos. En otras palabras, para el primer tipo de coche

$$\omega_1 = \frac{n_1 \cdot p_1}{\sum_{i=1}^{4} n_i \cdot p_i} = \frac{1 \cdot 200.000}{1 \cdot 200.000 + 2 \cdot 50.000 + 4 \cdot 15.000 + 1 \cdot 100.000} = 0{,}435$$

donde n_i indica el número de coches adquiridos de cada una de las marcas. Repitiendo el cálculo para el resto de marcas tendríamos:

$$\omega_2 = \frac{2 \cdot 50.000}{460.000} = 0{,}217$$
$$\omega_3 = \frac{4 \cdot 15.000}{460.000} = 0{,}130$$
$$\omega_4 = \frac{1 \cdot 100.000}{460.000} = 0{,}217$$

Se verifica que los pesos suman la unidad (excepto por error de redondeo). El índice de precios resulta ser en este caso:

$$\overline{p}_\omega = \sum_{i=1}^{4} \omega_i \cdot p_i = 0{,}435 \cdot 200.000 + 0{,}217 \cdot 50.000$$
$$+ 0{,}130 \cdot 15.000 + 0{,}217 \cdot 100.000 = 121{,}15$$

Las diferencias de ambos “promedios” son significativas y llamativas. En el primer caso la ponderación se basa en el número de unidades compradas mientras que en el segundo caso se basa en el valor de adquisición de las unidades compradas. Que los resultados sean tan distintos pone de manifiesto la necesidad de pensar con cuidado qué pesos son los más apropiados en cada caso que se analice.

4. Las calificaciones de los alumnos en un examen de Estadística han sido: 6, 4, 4, 3, 6, 10, 1, 0, 2, 6 ,6, 8, 5

   a. Calcular la media aritmética simple, la moda, la mediana y la media geométrica.
   b. Si usted fuese un líder estudiantil, ¿qué medida de centralidad escogería para argumentar la buena “calidad” del grupo?
   c. Si usted fuese el profesor de la materia, ¿qué medida de centralidad escogería para argumentar la pésima “calidad” del grupo?
   d. Si usted fuese un observador imparcial, ¿qué podría decir sobre el nivel del grupo?

   a. La media

$$\overline{x} = \frac{6+4+4+\cdots+8+5}{13} = \frac{61}{13} = 4{,}69$$

La moda de un conjunto de observaciones es el valor que aparece con mayor frecuencia. Por lo tanto, en esta colección de datos la moda es 6.

Si ordenamos las observaciones en sentido creciente, la mediana es, si no es impar, el valor de la observación que ocupa el lugar central $(\frac{N+1}{2})$. Puesto que $(\frac{N+1}{2})$=7 y el valor de la observación 7, la mediana es 5.

Finalmente, la media geométrica es la raíz *n-ésima* del producto de las observaciones dividida por el número de observaciones

$$\breve{x} = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$$

En este caso,

$$\breve{x} = \sqrt[13]{6 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 5} = 0$$

Vemos que la media geométrica queda “desvirtuada” ya que al existir una observación igual a cero hace que esta media geométrica sea cero.

b. La moda, ya que obtenemos la nota más alta con un 6.
c. La media, ya que el resultado es suspenso, con un 4,69.
d. La nota con mayor frecuencia es 6. Los que aprobaron, no lo hicieron con buena nota. Y el promedio está por debajo del aprobado.

5. En una empresa se pagan los siguientes salarios (en euros):

Salarios	Nº empleados
1.200	5
1.300	3
1.400	10
1.500	9
1.600	8
1.700	5
1.800	4

a. Calcular el salario “promedio”.
b. Dilucidar qué grupo de empleados tiene un mayor peso en la formación del salario “promedio” entendido como media ponderada (use dos tipos diferenciados de

pesos).

c. Determinar a qué grupo de empleados corresponde el punto medio de la escala salarial.
d. Uno de los empleados que cobra 1.800 € va a ser trasladado a otra sede y va a ser susstituido por un empleado que recibirá 3.500 €. Verificar si este cambio afecta las respuestas anteriores.

a. En el cálculo del salario "promedio" hemos de tener en cuenta que un mismo salario está compartido por más de un empleado y que el número de empleados es dispar según nivel salarial. Una opción natural es calcular el salario "promedio" usando una media aritmética ponderada en la que los pesos son el número de empleados que comparten un mismo salario sobre el total de empleados. Así, hay 5 empleados que ingresan 1.200 euros mensuales y un total de 44 empleados, de forma que el peso de este nivel salarial sería de 5/44. Otra alternativa sería calcular pesos en función del gasto asociado a cada tipo de salario. En este caso, el gasto en el nivel salarial 1.200 sería de 6.000 euros mientras que el gasto total puede verse que llegaría a 65.900 euros y el peso en este caso sería de 6.000/65.900. La tabla siguiente resume los pesos posibles:

Salario	Empleados	Pesos empleados	Masa salarial	Pesos salarios
1.200	5	0,114	6.000	0,091
1.300	3	0,068	3.900	0,059
1.400	10	0,227	14.000	0,212
1.500	9	0,205	13.500	0,205
1.600	8	0,182	12.800	0,194
1.700	5	0,114	8,500	0,129
1.800	4	0,091	7.200	0,109
Sumas	***44***	***1,000***	***65.900***	***1,000***

Tenemos pues 7 pesos, uno por cada categoría de nivel salarial. Gracias a estos pesos (tercera columna de la tabla) podemos calcular los salarios "promedio" cuando usamos los pesos derivados del número de empleados

$$\bar{x}_w = \sum_{j=1}^{7} w_j \cdot x_j = 1.497$$

Mientras que si usamos los pesos de la masa salarial (quinta columna) obtendríamos:

$$\bar{x}_w = \sum_{j=1}^{7} w_j \cdot x_j = 1.517$$

El salario "promedio" es bastante similar en ambos casos.

b. En ambos casos, el nivel salarial tercero, el que corresponde a 1.400 euros, representa el mayor peso en el cálculo del promedio ponderado.

c. El punto medio de la escala salarial se corresponde con la mediana. En la tabla apreciamos que los niveles salariales están ordenados de forma creciente. Hay 44 empleados, un número par, de forma que la mediana se corresponderá con las posiciones 22 y 23 que pertenecen al cuarto nivel salarial, es decir, con 1.500 euros.

d. El punto medio de la escala salarial medido por la mediana no se verá alterado. En cambio, el salario "promedio" medido por la media ponderada sí que será afectado, pues los pesos se modificarán al haber una nueva clasificación de empelados y niveles salariales. Con pesos basados en el número de empleados el salario "promedio" nuevo pasará a ser $\overline{x}_w = 1.536$, mientras que con pesos basados en la masa salarial será de $\overline{x}_w = 1.612$.

6. El ingreso mensual medio de los empleados agrícolas es de 1.300 euros. El de los empleados no-agrícolas es de 2.000 euros.

   a. Determinar la distribución de empleados que generaría un ingreso medio conjunto de 1.500 euros.
   b. Repetir si el ingreso medio conjunto fuese de 1.800 euros.
   c. Con los datos del apartado anterior, suponer que los empleados no-agrícolas se clasifican en empleados de la industria y empleados de los servicios, con proporciones del 40% y 60% respectivamente. Si el ingreso medio de los empleados de la industria es de 1.900 euros, hallar el de los empleados de servicios.

a. Conocemos el salario medio agrario, el no-agrario y el que corresponde al conjunto de ambos:

$$\overline{x}_A = 1.300$$
$$\overline{x}_{NA} = 2.000$$
$$\overline{x} = 1.500$$

También sabemos que el salario conjunto puede calcularse como una media ponderada del salario agrario y el no agrario, en la que los pesos son las proporciones de empleados en ambas categorías:

$$\overline{x} = \alpha \cdot \overline{x}_A + (1-\alpha) \cdot \overline{x}_{NA}$$

Despejando para la proporción α hallamos que es α=5/7.

b. Se trata de repetir el apartado anterior si ahora $\bar{x} = 1.800$. Hallaríamos que la proporción de empleados agrarios sería α=2/7.

c. El salario medio en la industria es de $\bar{x}_{IND} = 1.900$ con una proporción de empleados industriales del 40% y del 60% en los servicios. El sector no-agrario incluye a la industria y los servicios y sabemos que su salario medio es de 2.000 euros. En estas condiciones tendremos:

$$\bar{x}_{NA} = 0{,}40\ \bar{x}_{IND} + 0{,}60\ \bar{x}_{SER}$$

Y de aquí:

$$\bar{x}_{SER} = \frac{\bar{x}_{NA} \quad 0{,}40\ \bar{x}_{IND}}{0{,}60} = \frac{2.000 \quad 0{,}40\ 1.900}{0{,}60} = 2.066{,}67$$

7. Una empresa de pavimentación de calzadas ha reconstruido 240 metros de calle. La primera mitad se rehizo en 10 días mientras que para la segunda mitad se necesitaron 8 días. El alcalde del pueblo le pregunta al gerente de urbanismo cuál es la productividad "promedio" (metros de calzada por día) de la empresa. Ayude al gerente a responder a esta cuestión.

Vemos que la productividad (espacio pavimentado/tiempo empleado) difiere en las dos mitades de la calzada:

120 metros en 10 días $\rightarrow$ 12 metros/día

120 metros en 8 días $\rightarrow$ 15 metros/día

La productividad en ambas mitades es claramente diferente. Si el gerente cree que la productividad "promedio" es la media aritmética de ambas productividades, le contestará al alcalde que dicha cifra es de 13,5 metros por día (13,5 = (12 + 15)/2). Sin embargo, es inmediato ver que si esta productividad promedio se aplica a las dos mitades se genera una distancia que no corresponde a la efectivamente pavimentada. En efecto,

13,5 metros/día × 18 días = 243 metros

Si el gerente de urbanismo hubiese usado el promedio denominado media armónica, sin embargo, la respuesta hubiese sido otra. En este caso, el promedio de productividad sería: